淺談Stoke's 定理與電磁學

邵錦昌演講

李啓鈴記錄

今天我們所要討論的是一個跟數學與物理有關的題目, 而這個題目如果從歷史上來看的話, 它是來自於物理的, 當然現在是屬於數學的範疇, 我們現在就看一看。

1.Stoke's 定理與 Gauss 定理

第一個公式叫做 Stoke's 定理, 我們把它寫下來是這樣的一個公式:

$$\oint_c \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \hat{n} da \qquad (1)$$

上面這個公式, 一邊是線積分, 一邊是面積分, 所以我要假設各位已經有了線積分和面積分的基礎, 那麼這個公式是什麼意思呢? 就是說我們假設空間中有一個向量$\overrightarrow{A}$(如圖1), $\overrightarrow{A}$ 是隨著空間的點在變, 不同的點上有一個不同的向量, 這樣的東西我們就叫做一個向量場。

然後, 我們隨便畫一個曲線C, 那麼我們就可以把這個向量場沿著這個曲線去做線積分, 積完以後我們就得到一個值, 這個值是等於什麼東西呢? 假如在這個曲線上, 我們拿出一塊布把它蓋起來。造一個曲面, 而以這個曲線爲邊界。我們現在就利用剛剛那個向量場來求一個叫做旋度 (curl) 的東西, 它的公式是

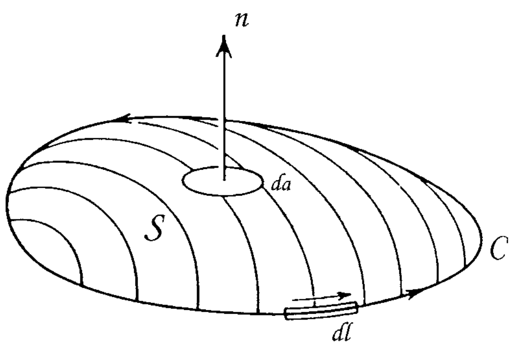

圖 1

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\overrightarrow{A} &= \nabla \times \overrightarrow{A} \\ &= \hat{e}_1(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}) + \hat{e}_2(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}) \\ &\quad + \hat{e}_3(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}) \\ \overrightarrow{A} &= (A_1, A_2, A_3) \end{aligned} \qquad (2)$$

curl$\overrightarrow{A}$是由$\overrightarrow{A}$導出的另一個向量場。 其

中$\hat{e}_1$是指x軸,$\hat{e}_2$是y軸,$\hat{e}_3$是z軸, $\overrightarrow{A}$在x、y、z軸上的三個分量, 我們分別表示爲A_1、A_2、A_3, 它們都是函數, 因爲 $\overrightarrow{A}$ 是隨著 x、y、z 在變, 所以 A_1、A_2、A_3當然也是函數。這裡我們爲了等一下的理由把x、y、z 改寫成x_1、x_2、x_3, 然後把$\overrightarrow{A}$的分量A_1、A_2、A_3 對x_1、x_2、x_3 分別取導數, 再經過適當的運算, 我們就得到一個由$\overrightarrow{A}$所導出的向量場, 當然, 在每一個地方都有一個curl $\overrightarrow{A}$, 我們把每一點的curl $\overrightarrow{A}$ 這個向量跟剛剛我們造的這個曲面當點上的法向量$\hat{n}$去做內乘(dot), 做完以後這也是一個函數, 在曲面上每一點都有一個值, 然後乘上曲面的面積元素da去做曲面積分, 所得到的結果和剛才的線積分相等, 這就是 Stoke's 定理。我們要注意一件事情, 這個曲面是任意的, 可以證明, 對於任意一個以這個曲線爲邊界的曲面, 我們所做出來的積分值不變, 換句話說, 我們到底選擇什麼曲面並沒有關係。

底下我們再介紹另外一個定理, 我們叫做 Gauss 定理

$$\oiint_S \overrightarrow{A}\cdot\hat{n}da=\iiint_V \nabla\cdot\overrightarrow{A}d^3x \qquad (3)$$

我們還是一樣在空間中有一個向量場$\overrightarrow{A}$, 然後我們現在選一個封閉的曲面S, 一個封閉的曲面就會包圍一個體積 V(如圖 2)

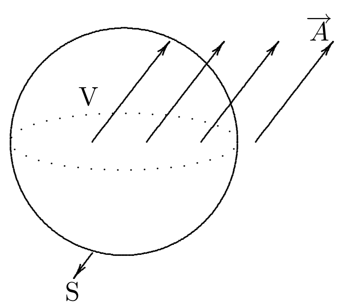

圖 2

然後我們跟剛剛一樣在曲面上做曲面積分, 剛剛是用 curl $\overrightarrow{A}$ 去做, 現在我們用$\overrightarrow{A}$本身去做, 這個意義是完全一樣, 我這裡特別在積分符號上畫個圈, 只不過強調現在的S是一個封閉的曲面。我們現在看右邊, 右邊是利用$\overrightarrow{A}$去做一個跟它相關的東西, 我們叫做散度(divergence), 用div$\overrightarrow{A}=\nabla\cdot\overrightarrow{A}$來表示, 剛剛我介紹的curl $\overrightarrow{A}$是一個向量, 現在所介紹的div$\overrightarrow{A}$ 本身並不是一個向量, 而是一個數量函數, 它的定義是

$$\text{div}\overrightarrow{A}=\nabla\cdot\overrightarrow{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3} \quad (4)$$

這個函數在 V 裡面每一點都有一個值, 然後乘上d^3x這個小體積去做體積分, 結果我們得到邊界上的曲面積分等於裡面的體積分, 這就是 Gauss 定理。

Stoke's 定理與 Gauss 定理會成立的原因, 其實就是微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus), 微積分基本定理是這樣的一個公式:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx \qquad (5)$$

右邊是$1-\dim$的積分, 左邊是$0-\dim$, 如果我們有一個線段, 它有兩個邊界a和b, 那麼點算是$0-\dim$的東西, 所以左邊算是$0-\dim$ 的一個量, 微積分基本定理就是函數在這兩個點上的值的差$f(b)-f(a)$ 等於在這個線段上的這個函數導數的積分, 當然這個定理各位都很熟悉, 而事實上這個定理也是在所有數學中最重要的一個定理。這個定理我們有各種各樣的變形, 可以將它推廣到高維空間上面。現在我們看 Stoke's 定理, 左邊

是$1-\dim$, 因爲它是線積分, 在線上面做$1-\dim$的積分, 等於一個$2-\dim$的積分, 而這個$1-\dim$的積分區域是$2-\dim$積分區域的邊界, 我們剛才所定義的 curl $\overrightarrow{A}$是$\overrightarrow{A}$的一種導數, 所以右邊就變成一個函數導數的積分; Gauss定理也是同樣的道理, 所以這兩個定理只不過是微積分基本定理應用到$1-\dim$和$2-\dim$的關係、$2-\dim$和$3-\dim$ 的關係而已。其實這樣的定理有很自然的推廣, 可以推廣到$(n-1)-\dim$和$n-\dim$的關係, 當然我們必須要知道如何把 curl 和 divergence 的觀念推廣到n維的情況, 推廣出去之後的定理通稱爲 Stoke's 定理。

2. 三個電磁的實驗定律

我們這次討論的主要目的就是 Stoke's 定理與 Gauss 定理如何應用到電磁學上面, 然後得到電磁學的方程式, 就是 Maxwell's equations, 所以我們來看一下電磁學在實驗上面、在觀察上面有那些基本的現象, 這些現象其實一共只有三個, 我們來看這三個實驗定律:

2.1. Coulomb 定律

第一個實驗定律, 我們叫做 Coulomb 定律

$$\overrightarrow{F}=q_1q_2\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \tag{6}$$

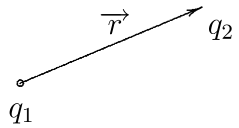

圖 3

Coulomb定律也就是說如果有兩個電荷q_1和q_2(如圖 3), 這兩個電荷中間有吸引力或排斥力, 相同的電荷相斥, 不同的電荷就相吸, 然後這個力量的大小和q_1q_2成比例, 且和反平方$1/r^2$成比例, 而r就是q_1 和q_2的距離, 方向是在兩點的連線上, 如果把方向表示出來的話, 就變成$\overrightarrow{r}/r^3$, q_1、q_2可正可負表示相斥或相吸。Coulomb 定律是在1785年左右, 由 Cavendish 和 Coulomb 分別做實驗發現的現象, 所有的電磁現象的研究, 也就從這個年代開始。

2.2. Biot-Savart 定律

第二個電磁現象, 我們叫做 Biot-Savart 定律, 差不多是在1820年左右由 Biot、Savart 及 Ampere 幾個人所發現的, 它的現象就是說, 假設有兩個線圈, 上面有電流通過, 一個是I_1, 一個是I_2(如圖 4)

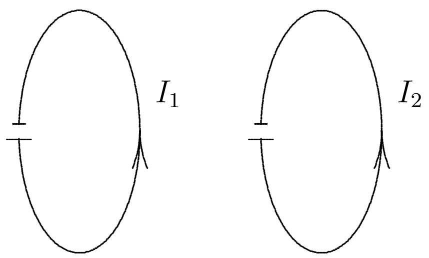

圖 4

我們發現這兩個線圈中間也會有吸引力或相斥力, 這個現象我們叫做 Biot-Savart 定律。我們曉得電流是由電荷流動產生的, 這個力和庫侖力一樣也是由電荷產生的, 只不過它是由電荷的流動產生的, 雖然是由電荷產生,

但並不是電力, 而是一個新的力, 原因是如果我們把一個磁針放在線圈附近的話, 磁針會受到電流的影響, 產生偏移, 換句話說, 這個磁針會受到電流的作用力, 經由 Biot、Savart 和 Ampere 等等長時間的研究後, 認爲電流產生的力和磁針產生的力是同一性質的力, 並不是歸在剛剛我們所講的庫侖力, 這是一個新的力, 我們叫做磁力, 這個力的公式是這樣的:

$$\overrightarrow{F} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{d\overrightarrow{\ell}_2 \times (d\overrightarrow{\ell_1} \times \overrightarrow{r})}{r^3} \quad (7)$$

這個公式要比當初庫侖定律複雜很多, 但基本上還是和反平方成比例。

2.3. Faraday 定律

第三個定律叫做 Faraday 定律, 是在1831年由 Faraday 和 Henry 發現的。假設我們有一個線圈, 然後我們讓磁場 (稍後定義) 在這個線圈附近變動 (如圖 5)

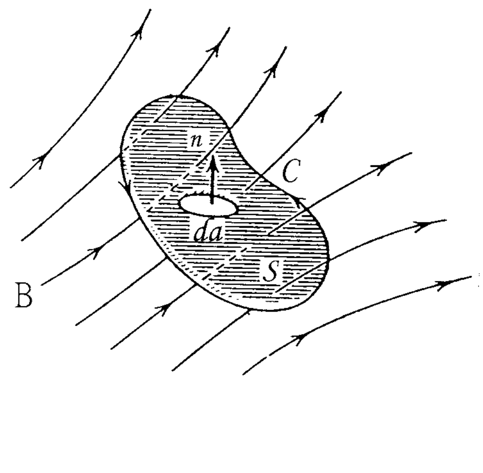

圖 5

比如把一個磁鐵放在這個線圈裡面移動的話, 我們便會發現線圈中有電流通過, 所以, 磁場的變動就會產生電流, 當然經過實驗之後, 它也可以歸納出一個定律出來, 這個定律可以寫成這個公式:

$$\oint_c \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{B} \cdot \hat{n} da \quad (8)$$

其中$\overrightarrow{E}$是指電場, 電場是由庫侖定律定義出來的。$\overrightarrow{B}$是指磁場, 將於稍後定義。如果這個線圈裡面有一個磁場通過, 把這個磁場對以這個線圈爲邊界的曲面做曲面積分, 如果$\overrightarrow{B}$隨著時間變化, 當然積出來的量也隨著時間變化, 這時候, 這個變化率會產生電場, 這個變化率等於電場沿著線圈的積分值, 這就是Faraday 定律。

這三個現象都是從自然界所發現的定律, 所有的電磁現象, 都是建立在這三個觀察現象上面 (除了一點點重要的小修正外)。

3. Maxwell's Equations

Faraday定律發現之後, 再經過一、二十年左右, Maxwell 把這三個 現象整理出四個方程式出來, 這就是有名的 Maxwell's Equations, 最後就變成整套的電磁理論。

Maxwell's equation:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overrightarrow{E} = 4\pi\rho & (9) \\ \nabla \times \overrightarrow{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} & (10) \\ \nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = 0 & (11) \\ \nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0 & (12) \end{cases}$$

這四個方程式, 兩個是關於電場的 divergence 和 curl, 另外兩個是關於磁場的 divergence 和 curl。所有的電磁現象, 例如:

日光燈的發亮、收音機、$\cdots$等, 全部可以用這四個方程式來解釋, 這四個方程式是由先前的三個現象導出來的, 導的過程主要是利用 Stoke's 和 Gauss 定理, 還有一些向量的計算。導出這四個偏微分方程式之後, 剩下的問題, 差不多就是數學家的問題。其中第一個方程式是和庫侖定律有關, 第三個是和 Faraday 定律有關, 剩下的兩個則是和 Biot-Savart 定律有關。前面兩個式子很容易可以用 Stoke's 或 Gauss 定理導出, 比較麻煩的是由 Biot-Savart 定律導出另外兩個式子, 這裡我們要稍微提一下, Biot-Savart定律並不完全等於這兩個式子, 這中間還有一些需要討論, 所以在這三個實驗現象和 Maxwell's Equations 之間還有一些東西需要補起來, 補這個東西的人當然就是 Maxwell, 所以這些方程式, 一般就叫做 Maxwell'sEquations。那麼下面我們就開始用這三個現象, 經過 Gauss 和 Stoke's 定理來把 Maxwell's Equations 建立起來。

3.1.Coulomb定律到第一個 Maxwell's Equation

首先我們來看庫侖定律, 庫侖定律告訴我們, 如果我們有兩個電荷, 它們之間就有作用力, 而這個力符合反平方定律, 我們把這個公式寫得稍微詳細一點:

$$\overrightarrow{F} = q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}|^3} \tag{13}$$

這個意思就是, 我們在空間中先選好一個座標原點, 再給座標$\hat{e_1}$、$\hat{e_2}$、$\hat{e_3}$, 然後假設q_1 是在$\overrightarrow{r_1}$的位置上, $\overrightarrow{r_1}$就是從座標原點到q_1的位置, q_2是在$\overrightarrow{r_2}$的位置上, $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$很容易可以看出來是$q_1$ 到q_2的這個向量 (如圖 6)

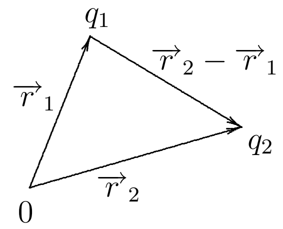

圖 6

所以$\overrightarrow{F}$是指q_2所受的力, 方向在$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ 上, 大小是和反平方成比例。

3.1.1. 電場

爲了研究方便起見, 我們不妨在 (13) 式中q_2的位置放一個單位電荷, 因爲所受的力與電荷大小成比例, 所以只要用單位電荷來研究就可以了, 放了單位電荷之後, 這個力我們就叫做電場, 電荷放在不同的位置, 電場的大小與方向也會變, 所以就把它看成是$\overrightarrow{r_2}$的函數, 然後將$\overrightarrow{r_2}$改寫成$\overrightarrow{r}$就得到

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = q_1 \cdot \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}|^3} \tag{14}$$

這就是電場的定義。如果我們在空間中多放一些電荷, 根據實驗, 這些電荷作用在單位電荷上的力是遵守一個原理叫做 Linear superposition principle, 換句話說, 如果我們有電荷$q_1, q_2, \cdots, q_n$, 那麼這個單位電荷所受的力就是

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}|^3} \tag{15}$$

同樣地, 磁場也是遵守 Linear superposition principle, 由於 Maxwell's equations

要解的就是電場和磁場, 而我們出發點已經用了線性的原理, 所以我們得到的方程式都是線性的, 當然自然界的其它現象並沒有這麼簡單, 例如核子力就絕不是線性的, 所以現在物理學家所面對的問題是非線性的。

有的時候我們所討論的問題是一堆電荷可以像物質一樣, 而物質是由分子構成的, 不過分子很小, 當它很多又分佈的很密的時候, 我們可以用連續體的觀念來看它, 如果電荷也是這樣的話, 我們不妨介紹一個電荷密度ρ的觀念, 現在把q_i用ρ表示, 和改成積分, $\overrightarrow{r_i}$改成$\overrightarrow{r'}$, 然後這個電場公式就是

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \iiint \rho(\overrightarrow{r'}) \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|^3} d\overrightarrow{r'} \quad (16)$$

3.1.2.推導過程

現在我們來求$\overrightarrow{E}$的divergence, 我們不妨以 (15) 式逐項來看, 經由直接計算, 我們很容易可以證明當$\overrightarrow{r} \neq \overrightarrow{r_i}$時, $\nabla \cdot \overrightarrow{E} = 0$。然後我們把中間一個量拿來做面積分

$$\iint_{S_i} q_i \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}|^3} \cdot \hat{n} da \qquad (17)$$

這個面S_i怎麼取呢? 假設有很多個電荷$q_1, q_2, \cdots, q_i, \cdots$, 對於$q_i$電荷, 我們取一個以$q_i$為球心的小球面 (如圖 7)

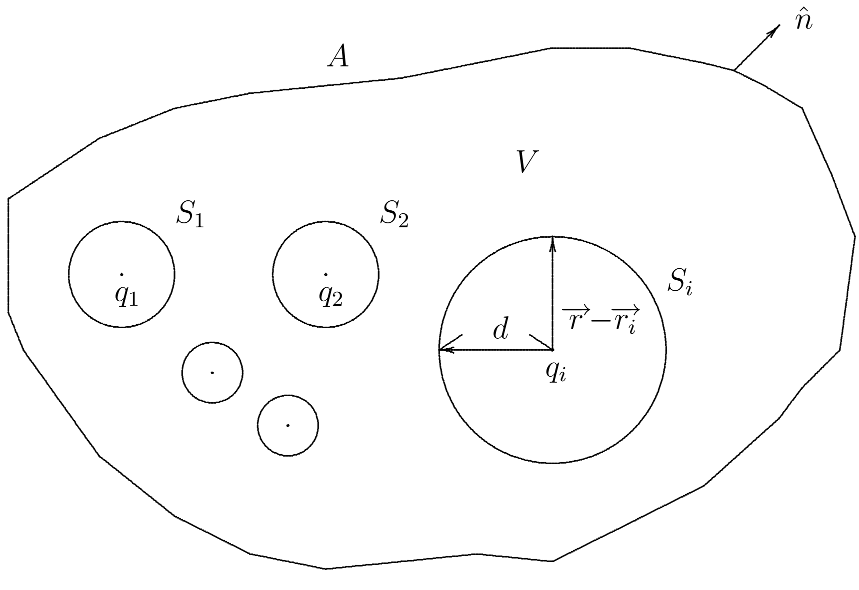

圖 7

使得這個球只包含q_i一個電荷, 然後在球面上做面積分, 因為$\overrightarrow{r}$在球面上, 那麼$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}$就在$\hat{n}$的方向上, 假設球的半徑為$d$, 則

$$(17)\text{ 式} = \frac{q_i}{d^2} \iint_{S_i} da = 4\pi q_i$$

現在假設有$q_1, q_2, \cdots, q_n$個電荷, 然後做一個大體積V, 將所有的電荷都包含在裡面, V的邊界叫做A, 我們對$\overrightarrow{E}\cdot\hat{n}$做面積分, 這個面積分等於每個小球面$S_i$的面積分和

$$\iint_A \overrightarrow{E}\cdot\hat{n}da = \sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i}\overrightarrow{E}\cdot\hat{n}da \qquad (18)$$

原因是如果將兩式相減, 這整個的積分可以看成是一個曲面S的積分, 現在的S就是把V扣掉各個小球之後, 所得到的體積V'的邊界, 然後根據Gauss 定理, 這整個曲面上的積分, 就會等於 $\iiint_{V'}\nabla\cdot\overrightarrow{E}d^3x$, 而在這個$V'$上的 $\nabla\cdot\overrightarrow{E}=0$, 所以這個積分值就等於$0$, 移項之後就得到 (18) 式。又這些小球面上的積分等於$4\pi q_i$, 所以 $\iint_A \overrightarrow{E}\cdot\hat{n}da = 4\pi\sum_{i=1}^{n}q_i$, 這就是有名的 Gauss Law。其實歷史上 Gauss 應該是先處理靜電學上的問題, 然後才把數學公式抽離出來, 也就是 Gauss 定理。

剛剛我們處理的是一個一個的電荷, 現在把它推廣到有連續電荷分佈的狀況, 這時候電荷的和, 可以寫成 $\iiint_V \rho(\overrightarrow{r})d^3\overrightarrow{r}$, 所以Gauss Law 就變成

$$\iint_A \overrightarrow{E}\cdot\hat{n}da = 4\pi\iiint_V \rho(\overrightarrow{r})d^3\overrightarrow{r} \qquad (19)$$

因為左邊是一個向量場的面積分, 我們可以再用一次 Gauss 定理, 它就等於 $\iiint_V\nabla\cdot\overrightarrow{E}d^3x$, 然後再前後對照一下, 因為這裡的$A$是任意取的, 所以$\nabla\cdot\overrightarrow{E}=4\pi\rho(\overrightarrow{r})$, 這就是第一個Maxwell's Equation。

3.2.由 Biot-Savart 定律導出第二個和第四個Maxwell's Equation

接著我們再討論 Biot-Savart 定律, 這比較麻煩一點, 在討論之前, 我們先來介紹一下電流

3.2.1.電流

剛剛討論的是靜電學的東西, 也就是電荷靜止的狀況, 但是當然電荷也會動, 電荷動會有新的現象發生, 所以現在我們要考慮到電荷動的情況, 事實上電荷動的情形跟質點流動的情形一樣, 因此我們可以學習流體力學, 定義電流密度$\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{J}$的方向在電流流動的方向$\hat{n}$上, 如果N表示單位體積內的電荷個數, q表示每個電荷的電荷量, v是電荷速度, 則

$$\overrightarrow{J} = N\cdot q\cdot v\cdot\hat{n} \qquad (20)$$

如果空間中有電荷在流動, 我們可以做一個小面積 A(如圖8),

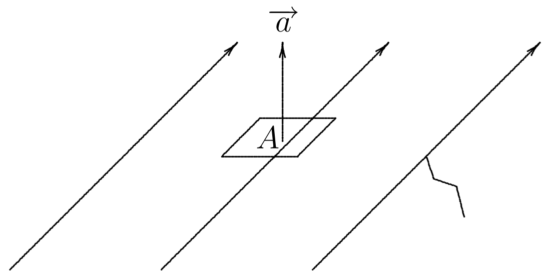

圖 8

然後利用$\overrightarrow{J}$來求單位時間通過A的電荷量, 得到

$$\iint_A \overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{a}da = \text{單位時間通過面積A的電荷量}$$

式中$\overrightarrow{J}\cdot\overrightarrow{a}$ 是$\overrightarrow{J}$在法線方向上的分量。一般而言, 我們平常用的電線的截面積A差不多都是相同的, 而且很小, 所以電線上的電流I=JA。

現在來看$\overrightarrow{J}$和ρ的關係, 因爲我們總是假設電荷是保守的, 也就是電荷不會產生也不會消失, 所以假設空間中有電荷在流動, 取一個封閉曲面 A(如圖9),

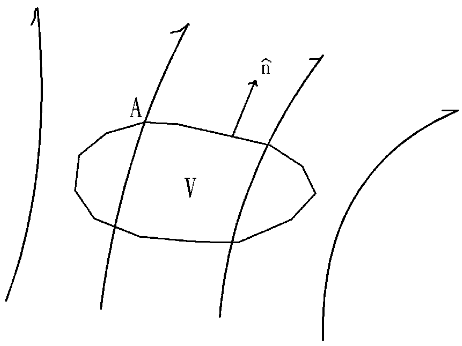

圖 9

這時候 A 裡面的電荷量, 就等於$\iiint_V \rho d^3x$, 又因爲電荷在流動, 所以這裡面的電荷量會改變, 這變化的增加或減少, 完全是由於電荷的流進或流出, 這就可以用$\overrightarrow{J}$來算, 因此

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho d^3x = -\iint_A \overrightarrow{J}\cdot\hat{n}da \qquad (21)$$

因爲習慣上取$\hat{n}$爲向外的方向, 所以流出算正, 流入算負, 不過, 電荷量的導數, 增加時爲正, 減少時爲負, 所以上式中有一負號。但是右邊又是一個面積分, 因此可以再用一次Gauss 定理, 就得到 $-\iiint_V \nabla\cdot\overrightarrow{J}d^3x$, 又A 是任意取的, 所以等式對於任意 V 都成立, 於是得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\overrightarrow{J}=0 \qquad (22)$$

其實這個式子跟電磁學並沒有深入的關係, 只不過是一般的 ConservationLaw 而已。

3.2.2. Biot-Savart 定律的討論

我們來看一下 Biot-Savart 定律爲什麼是 (7) 式這種樣子, 作實驗時, 我們放兩個線圈I_1和I_2, 分取下一段$d\ell_1$和$d\ell_2$ (如圖10)

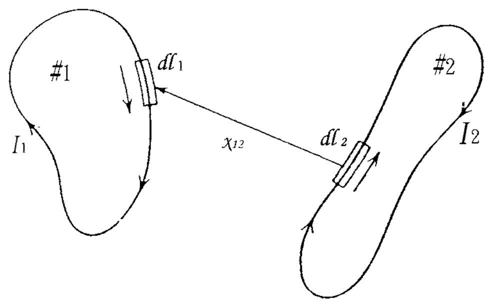

圖 10

這兩段的電流是 $I_1d\ell_1$ 和 $I_2d\ell_2$, 我們先看這兩個小電流中間的作用力, 這個作用力和 $I_1d\ell_1$、$I_2d\ell_2$ 成比例, 這和剛剛靜電力與q_1、q_2成比例是一樣的, 所以$I_1d\ell_1$和$I_2d\ell_2$就是剛剛的q_1和q_2, 而$\overrightarrow{r}/r^3$就是剛剛的反平方定律, 只不過方向比剛剛要複雜多了, 力的方向並不在兩點的連線上。現在將$d\ell_1$和$d\ell_2$取下來看 (如圖11)

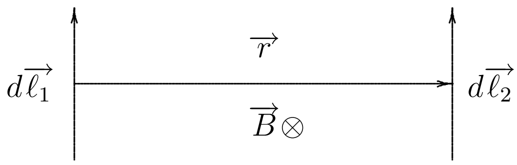

圖 11

$d\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{r}$ 的方向指向紙內(利用右手定則), 我們將它定義成磁場$\overrightarrow{B}$, 接著再看$\overrightarrow{B}$對$d\overrightarrow{\ell_2}$ 的作用, 如果我們做一個 Biot-Savart 定律的實驗, 將磁鐵放如圖 12

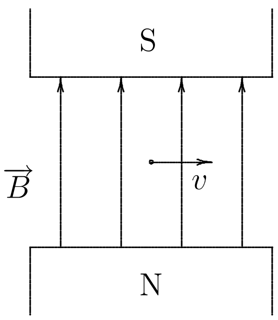

圖 12

那麼就有一個磁場$\overrightarrow{B}$, 假如中間有一個電荷, 它靜止不動的話, 則它不受力, 若它在動的話, 它會受一個力, 這個力的方向和大小跟$\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}$成比例, 所以力的方向與$\overrightarrow{v}$且與$\overrightarrow{B}$垂直。剛剛我們已經定義了一個磁場$d\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{r}$, 當然這個定義需要跟磁鐵做比較, 實驗的結果是一樣的, 而$d\overrightarrow{\ell_2}$可以看成是一個電荷在運動, $d\overrightarrow{\ell_2}$就像$\overrightarrow{v}$一樣, 所以最後的力就會與$d\overrightarrow{\ell_2}\times(d\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{r})$ 成比例, 再把這些小線段加起來, 就是這兩個線積分。

磁力和電力不大一樣, 磁力的方向並不在連線的方向上, 而在垂直的方向上, 所以磁力不作功, 而電力作功。

接著要把 (7) 式推廣到一般的情形, 因為我們要導一般電磁學的定律, 當然不能只用在線圈的電流上, 而是用在一般的電荷運動上, 首先, 我們研究所謂 stationary 的情形, 也就是電荷及電流不隨時間變動, 所以$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, 根據 (22) 式, 得到$\nabla\cdot\overrightarrow{J}=0$。在一般的情形時, 因為 I 等於 J 乘上面積, 而面積再乘上$d\ell$就變成體積分, 所以公式可以寫成

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= \frac{1}{c^2}\int d^3r\int d^3\overrightarrow{r'}\,\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r})\\ &\quad\times\left(\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r'})\times\frac{\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}|^3}\right)\end{aligned}\qquad(23)$$

$$c:\text{光速}=2.9\times10^{10}cm/sec$$

當我們在做 Biot–Savart 定律的實驗時, 因為一開始在 Coulomb 定律的時候, 就有電荷, 從電荷又定義了電荷密度, 所以一切單位從這邊一直過來, 都已經固定了, 我們去量兩個線圈的作用力時, 發覺這個力相當的小, 所以當這些單位全部固定的時候, 有一個比例常數, 實驗的結果它等於$1/c^2$, c正好等於光速, 因此這個力比靜電力小多了, 到目前為止, c與光速一致只是巧合而已。現在我們來看一下 Biot-Savart 定律如何導出 (10) 和 (12) 式。

3.2.3.**第四個** Maxwell's equation **的導出**

首先, 我們利用 (23) 式來定義磁場, 所以將$\overrightarrow{F}$寫成

$$\overrightarrow{F}=\frac{1}{c}\int d^3\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r})\times\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})\qquad(24)$$

假設有兩堆電荷在流動, 一堆$\vec{J}(\vec{r})$, 另一堆$\vec{J}(\vec{r}')$, 這兩堆流動的電荷就有作用力, 根據實驗的結果就得到(23) 式, 然後把 $\vec{r}'$ 這部份的積分叫做$\vec{B}(\vec{r})$, 也就是 $\vec{r}'$ 這部份電荷流動所產生的磁場, 它在$\vec{J}(\vec{r})$ 所做的力就是$\vec{F}$, 然後比較兩式,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}'\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{25}$$

這就是電流產生磁場的定義。底下我們用到一個公式

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= -\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}'\vec{J}(\vec{r}') \\ &\quad \times\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\end{aligned}$$

然後我們再用一個向量的公式

$$\nabla\times(\psi\vec{a}) = \nabla\psi\times\vec{a}+\psi\nabla\times\vec{a}$$

ψ是任意純量函數, $\vec{a}$是任意向量函數

我們把 $\vec{J}(\vec{r}')$ 當成 $\vec{a}$, $1|\vec{r}-\vec{r}'|$ 當成 ψ, 但 $\vec{J}(\vec{r}')$ 是 $\vec{r}'$ 的函數, 而 ∇則是對$\vec{r}$ 而言, 所以 $\nabla\times\vec{a} = 0$, 因此$\nabla\times(\psi\vec{a}) = \nabla\psi\times\vec{a}$,

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c}\int d^3\vec{r}'\nabla\times(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) \\ &= \frac{1}{c}\nabla\times\int d^3\vec{r}'(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) \quad (26)\end{aligned}$$

可是, 對任意向量函數$\vec{A}$, $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$, 這一來的話$\nabla\cdot\vec{B} = 0$, 我們就得到 Maxwell's equations 的第四個方程式。如果把$\nabla\cdot\vec{B} = 0$與第一個方程式$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$做比較的話, 我們可看出它的意義, 因爲$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$, 所以$\nabla\cdot\vec{E}$ 可以表示出電場的來源, 可是$\nabla\cdot\vec{B} = 0$, 意思是說我們有 electric charge, 可是我們並沒有 magnetic charge。到了後來, 二十世紀的物理學家 Dirac, 硬是要討論也有 magnetic charge 的情況, 這就是有名的 monopole 理論, 而且不管理論或實驗討論的非常多, 內容也很多, 但這是屬於另外的範圍。

3.2.4.第二個 Maxwell's equation 的推導

現在我們來看第二個 Maxwell's equation, 利用 (26) 求$\vec{B}$的curl

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c}\nabla\times\nabla\times\int d^3\vec{r}'\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

計算這個式子, 我們利用一個向量恆等式

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A},$$

$\vec{A}$ 是任意向量函數

$$\text{其中}\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}\right)$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B} &= \frac{1}{c}\nabla\nabla\cdot\int d^3\vec{r}'\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &\quad -\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}'\nabla^2\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (27)\end{aligned}$$

我們先看第一項

$$
\begin{aligned}
& \text{第一項} \\
= & \frac{1}{c}\nabla\int d^3\vec{r'}\,\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \\
= & \frac{1}{c}\nabla\int d^3\vec{r'}\,\vec{J}(\vec{r'})\cdot\nabla(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}) \\
= & -\frac{1}{c}\nabla\int d^3\vec{r'}\,\vec{J}(\vec{r'})\cdot\nabla'(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|})
\end{aligned}
$$

接著再用另一個向量恆等式

$$\nabla\cdot(\psi\vec{a}) = \vec{a}\cdot\nabla'\psi + \psi\nabla'\cdot\vec{a}$$

我們把$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$當做$\psi$, 把$\vec{J}(\vec{r'})$ 當做$\vec{a}$ 得到

$$
\begin{aligned}
\text{第一項} = & -\frac{1}{c}\nabla\int d^3\vec{r'}\left[\nabla'\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right. \\
& \left. -\frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right]
\end{aligned}
$$

因為第一個積分是某一個向量場的 divergence 的積分, 這樣又可以用 Gauss 定理, 可是現在積分的範圍是任意的, 是包含所有電荷的任意範圍, 當然可以將這個範圍推到∞去, 所以我們得到

$$\int d^3\vec{r'}\,\nabla'\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \iint_S \frac{\vec{J}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}d\vec{S} \tag{28}$$

這個面S可以推到∞去, 而在∞的地方, 我們都假設物理量為0, 否則, 整個宇宙的能量會變成∞, 至於宇宙的能量我們相信是有限的, 所以 (28) 式等於0, 而我們在做 Biot-Sovart 定律實驗時, 我們又假設了 stationary case, 因此, $\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r'})$等於0, 我們就得到第一項整個等於0; 關於第二項, 我們使用底下這個式子

$$\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'})$$

其中$\delta(\vec{r}-\vec{r'})$是所謂的Dirac δ函數, 具有下面的性質, 即對於任意函數$f(\vec{r})$

$$\iiint_V f(\vec{r'})\delta(\vec{r}-\vec{r'})d\vec{r'} = f(\vec{r})$$

其中$\vec{r}$包含在體積V之內。關於這部份我們不說明得太詳細了, 總之

$$
\begin{aligned}
\text{第二項} &= \frac{4\pi}{c}\iiint\vec{J}(\vec{r'})\delta(\vec{r}-\vec{r'})d\vec{r'} \\
&= \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r})
\end{aligned}
$$

所以, 就得到 (27) 式, $\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(\vec{r})$。這個式子和第二個Maxwell's equation 有一些差別, 這是最有趣的一部份, 我們等一下再來談它。

3.3. 由 Faraday 定律到第三個 Maxwell's Equation

根據實驗的結果, Faraday 定律是

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\partial\partial t\iint_S\vec{B}\cdot\hat{n}da$$

又由 Stoke's 定理

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S\nabla\times\vec{E}\cdot\hat{n}da$$

比較上面兩式, 而且這個曲面S是任意的, 所以就得到第三個 Maxwell's equation

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

這一部份是相當簡單的。

3.4. Faraday 的修正

Maxwell's Equation

整個綜合起來, 我們差不多已經得到 Maxwell's equations 了。可是比較一下我們所得到的四個方程式和 Maxwell's equaitons, 我們發現$\nabla \times \overrightarrow{B}$不一樣, $-\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$項沒有了, 可以感覺的出來這四個方程式放在一起是不 consistent, 因爲只有一個跟時間有關的方程式, 別的方程式都沒有時間, 這很顯然一定有矛盾在, 所以我們知道的結果一定有缺陷, 因爲我們在 Biot-Savart 的實驗時做了一個 stationary 的限制, 換句話說, 所討論的$\overrightarrow{J}$是加了$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = 0$的條件進去, 因此所得到的定律本身有缺陷是很自然的, 這當然要靠 Maxwell 的天才, 他看出這個事實, 然後把它補起來。

現在看$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J}$ 這個式子, 如果成立的話, 則

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{B} \equiv 0$$

可是一般$\nabla \cdot \overrightarrow{J} \neq 0$。爲了要找出補救的辦法, 我們來考慮 Conservation of charge, 這是一定會成立的, 所以

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{J}$$

Maxwell 覺得ρ可以由第一個方程式得到

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \overrightarrow{E}$$

因此

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi}\nabla \cdot \overrightarrow{E} + \nabla \cdot \overrightarrow{J} \\ &= \nabla \cdot \left(\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

一般來講$\nabla \cdot \overrightarrow{J} \neq 0$, 除非 stationary, 但$\nabla \cdot (\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}) \equiv 0$, 所以 Maxwell 就把$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r})$中的$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r})$加上$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$, 這時候$\nabla \cdot \nabla \times B \equiv 0$, 而$\nabla \cdot \frac{4\pi}{c}(\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial t}) = \frac{4\pi}{c}\nabla \cdot (\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t})$也恆等於0, 就把原來的第二個方程式修改成

$$\nabla \times \overrightarrow{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\overrightarrow{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

再把$\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$項搬到左邊, 於是得到我們要的第二個 Maxwell's equation。Maxwell 只是做了這樣一個簡單的變動, 結果是對的, 所有的電磁現象全部在這裡, 也就是加了$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$項之後, 我們由數學式子可以導出波動 (wave) 的現象, 可以導出輻射 (radiation) 的現象, 也就是一個電荷如果有加速度在動的話, 它會輻射出電波出來等等。

4. 波動現象

現在再花一點時間說明一下波動現象, 我們看一下 (11)、(12) 這兩個方程式, 從$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$, 和剛剛所提一個東西的 divergence 如果等於0, 則它一定是一個 curl, 所以$\overrightarrow{B}$可以寫成$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$, 我們再看$\nabla \times \overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} = 0$, 將剛剛的結果代入, 再把 curl 全部提出來, 得到$\nabla \times (\overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}) = 0$, 先前我們又提過, 一個東西的 curl 等於0的話, 那麼它本身一定是一個 gradient, 所

以$\overrightarrow{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$, 這裡的負號只是爲了方便, 如此一來得到一組方程式

$$\begin{cases} \overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A} & (29) \\ \overrightarrow{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} & (30) \end{cases}$$

式中$\overrightarrow{A}$叫做vector potential, ϕ叫做 scalar potential, 我們將 (29)、(30) 代入 (9)、(10) 得到A和ϕ的方程式。

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\overrightarrow{A}) = -4\pi\rho \quad (31)$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla\cdot\overrightarrow{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} \quad (32)$$

我們可以設法使$\nabla\cdot\overrightarrow{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$, 因爲$A$和$\phi$都並不唯一, 如果$\overrightarrow{B}=\nabla\times\overrightarrow{A}$那麼另外一個函數$\overrightarrow{A}+\nabla\lambda$的 curl 也是等於$\overrightarrow{B}$, 而如果$\phi$也同時換成$\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$的話, $\overrightarrow{E}$也不會改變, 所以我們總是可以選擇適當的λ, 使得$\nabla\cdot\overrightarrow{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$, 剩下的方程式, 就是所謂的 wave equation, c是這個波的速度, 即波速, 實驗量出來的結果,c正好等於光速, 所以 Maxwell 就說光是一種電磁波, 當然 Maxwell 以前已經有物理學家說光是一種波動, 但是並不曉得光是電磁波, 所以 Maxwell 的發現, 當然是一種劃時代的發現。

5. 結語

由三個實驗定律最後能夠導出四個簡潔的方程式, 包含了所有的電磁現象, 這當然是經過很多偉大的天才, 在長時間的努力之下才完成的。但毫無疑問的 Stoke's 定理及 Gauss 定理在整個的過程中是居於關鍵性的地位的。

—本文作者任教於交通大學應數系—